www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Options M et P' **ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I** CONCOURS 1990

DURÉE : 4 heures

Notations

L'intervalle ouvert $\mathbb{R}_+^*$ sera désigné par I dans tout le problème. f est une fonction de I dans $\mathbf{R}$ de classe C^1.

On rappelle que si h est une fonction de I vers $\mathbb{R}$ et si $k \in I$ alors :

1. h est uniformément continue sur I si et seulement si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in I^2 \quad |x - y| < \alpha \Rightarrow |h(x) - h(y)| < \varepsilon$$
2. h est k-lipschitzienne sur I si et seulement si : $\forall (x, y) \in I^2 \quad |h(x) - h(y)| \leqslant k|x - y|$.
3. « h admet une limite en $+\infty$ » signifie que « h admet une limite finie ou *infinie* en $+\infty$ ».

Le but du problème est l'étude du comportement asymptotique de f et de f' au voisinage de $+\infty$.

Dans la partie I sont présentés *des exemples qui pourront être utilisés dans la suite.* La partie II étudie de façon générale le cas où f' est bornée tandis que la partie III suppose le contraire.

La présentation et la rédaction seront deux éléments importants dans l'appréciation des solutions proposées. Toute copie raturée ou illisible sera corrigée aux risques et périls du candidat.

PARTIE I

1. Les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\begin{cases} \alpha_n = \dfrac{1}{n^3 + 3} \\ \beta_n = \alpha_n + n \\ \gamma_n = n + 1 - \alpha_{n+1} \end{cases}$$

a. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n < \beta_n < \gamma_n < n + 1$$

b. On définit la fonction φ sur I par :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \varphi(n) = n \\ \varphi(\beta_n) = \varphi(\gamma_n) = 0 \end{cases}$$
et φ est affine sur les intervalles $[n, \beta_n]$, $[\beta_n, \gamma_n]$ et $[\gamma_n, n + 1]$.

Représenter graphiquement φ sur $[n, n + 1]$. φ est-elle bornée sur I ? φ est-elle uniformément continue sur I ?

c. Calculer : $\displaystyle\int_{\beta_n}^{\beta_{n+1}} \varphi(t)\,dt$.

d. Étudier la convergence de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$.

2. *a.* Donner l'allure de la représentation graphique de $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ sur I.

Étudier la convergence de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Tournez la page S.V.P.

b. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$: $a_k = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ et $b_k = \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$

Soient $x \in I$ et p la partie entière de $\frac{x}{2\pi}$.

Montrer que :

$$\begin{cases} a_k > 0 \\ b_k < 0 \\ a_k + b_k > 0 \\ 0 \leqslant \int_{2p\pi}^{x} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt \leqslant a_p \end{cases}$$

← lire $2p\pi$

c. En déduire que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt > 0$.

d. Étudier la convergence puis le signe de $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$

e. On pose $\psi(x) = x \int_0^x \sin(t^2)\,dt$

Étudier les limites éventuelles de ψ et ψ' en $+\infty$.

ψ et ψ' sont-elles bornées sur I ?

PARTIE II

Dans cette partie f' est bornée sur I.

1. *a.* Montrer que f est lipschitzienne sur I. En déduire que f est uniformément continue sur I.

   b. La fonction $u : x \longmapsto x^\alpha \ln(x+1)$ est-elle uniformément continue sur I quand $\alpha \in [0,1[$? ($\ln(x+1)$ désigne le logarithme népérien de $(x+1)$).

2. Prouver que :

$$\forall a > 0 \qquad \lim_{t \to +\infty} f(t)\, e^{-at} = 0$$

3. On suppose que f est bornée sur I.

   a. Donner alors un exemple simple de fonction f telle que ni f ni f' n'ait de limite en $+\infty$.

   b. Si f admet une limite finie en $+\infty$, en est-il de même pour f' ?

   c. Si f est convexe sur I, démontrer que : $\lim_{+\infty} f' = 0$.

   d. Si f' admet une limite finie l en $+\infty$, que peut-on dire de l ? f admet-elle alors une limite finie en $+\infty$?

Tournez la page S.V.P.

4. On suppose maintenant que f est non bornée sur I.

   a. Donner alors un exemple simple de fonction f telle que $\lim_{+\infty} f' = 0$.

   b. Si $\lim_{+\infty} f' = l$ avec $l \in \mathbb{R}^*$, trouver un équivalent de f au voisinage de $+\infty$ (justifier avec précision).

   En déduire $\lim_{+\infty} |f|$.

5. On suppose que f' est uniformément continue sur I.

   a. Si f' n'admet pas pour limite 0 en $+\infty$, montrer que :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} : \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad |f'(a_n)| \geqslant \varepsilon \\ \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty . \end{cases}$$

   b. En déduire que si f admet une limite finie en $+\infty$, alors $\lim_{+\infty} f' = 0$.

   c. Montrer que le résultat de II.5.*b.* tombe en défaut si on ne suppose plus que f' est uniformément continue sur I.

III

Dans cette partie f' n'est pas bornée sur $[1, +\infty[$.

1. Montrer, à l'aide d'un exemple, que la proposition $\lim_{+\infty} |f| = +\infty$ n'est pas toujours vérifiée.

2. On suppose que f est bornée sur I.

   a. Montrer que f' n'admet pas de limite en $+\infty$.

   b. Montrer que f peut avoir une limite finie en $+\infty$. Est-ce toujours le cas ? Justifier.

3. On suppose que f n'est pas bornée sur $[1, +\infty[$.

   a. Si f n'admet pas de limite en $+\infty$, prouver qu'il en est de même pour f'.

   b. Si f admet une limite en $+\infty$, en est-il de même pour f' ?

4. On suppose que f' est uniformément continue sur I.

   a. Prouver qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f'(a_n)| \geqslant n + 1$.

   b. En déduire que :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [a_n - \alpha, a_n + \alpha] \quad |f'(x)| \geqslant n$$

   c. En déduire que f n'est pas bornée sur I.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail